Experimentalphysik 5a

WS 13/14
Prof. Dr. Werner Heil **Blatt 7**

http://www.ag-heil.physik.uni-mainz.de

Abgabetermin: 16.12.2013, 10:30

Aufgabe 1 Kopplung von Bahndrehimpuls mit Spin (5 Punkte)

In der Vorlesung wurde der Hamiltonoperator $\hat{H}_{LS}$ für die Spin-Bahn-Kopplung bereits angegeben:

$$\hat{H}_{LS} \;=\; \eta(r)\left(\vec{L}\cdot\vec{S}\right) \qquad \text{mit} \quad \eta(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{2m_0^2c^2}\frac{1}{r^3}$$

Die Basisfunktionen

$$\begin{aligned}\psi_{n,l,m,m_s=+1/2}(r) &= R_{n,l}Y_l^m\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ \psi_{n,l,m,m_s=-1/2}(r) &= R_{n,l}Y_l^m\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

sollen in ein System mit j^2, l^2, s^2, M_j transformiert werden:

$$|J, M_j; ls\rangle = \sum_{m_s=\pm 1/2}\langle lm; sm_s|JM_j\rangle\,|lm; sm_s\rangle$$

$$M_J = m_{j_1} + m_{j_2}$$

Clebsch-Gordan-Koeffizienten $< j_1, m_{j_1}; \frac{1}{2}, m_{j_2}|J, M_J >$ für die Kopplung eines Drehimpulses (j_1, m_{j_1}) mit dem Spin $(1/2, m_{j_2} = \pm 1/2)$ zum Gesamtdrehimpuls (J, M_J):

J	$m_{j_2} = +\frac{1}{2}$	$m_{j_2} = -\frac{1}{2}$
$j_1 + \frac{1}{2}$	$\left(\frac{j_1+M_J+\frac{1}{2}}{2j_1+1}\right)^{1/2}$	$\left(\frac{j_1-M_J+\frac{1}{2}}{2j_1+1}\right)^{1/2}$
$j_1 - \frac{1}{2}$	$-\left(\frac{j_1-M_J+\frac{1}{2}}{2j_1+1}\right)^{1/2}$	$\left(\frac{j_1+M_J+\frac{1}{2}}{2j_1+1}\right)^{1/2}$

(a) (1P) Zeigen Sie, dass Sie die Basisfunktionen für $M_J = m + 1/2$ schreiben können als:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_{n,l,j=l+1/2,m_s} &= \sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}}R_{n,l}Y_l^m\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \sqrt{\frac{l-m}{2l+1}}R_{n,l}Y_l^{m+1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\ \bar{\psi}_{n,l,j=l-1/2,m_s} &= -\sqrt{\frac{l-m}{2l+1}}R_{n,l}Y_l^m\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}}R_{n,l}Y_l^{m+1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Bitte wenden!

(b) (1P) Berechnen Sie das Produkt $\vec{L}\cdot\vec{S} = L_x S_x + L_y S_y + L_z S_z$, wobei

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Setzen Sie $L_\pm = L_x \pm iL_y$, mit $L_\pm Y_{l,m} = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}Y_{l,m\pm 1}$.

(c) (2P) Berechnen Sie nun den Eigenwert a aus $\vec{L}\cdot\vec{S}|J, M_J; ls >= a|J, M_J; ls >$ für $j = l \pm 1/2$, mit den Funktionen aus Teilaufgabe a).

(d) (1P) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit den Eigenwerten aus $\vec{L}\cdot\vec{S} = \frac{1}{2}\left(J^2 - L^2 - S^2\right)$ für $j = l \pm 1/2$

Aufgabe 2 Relativistische Effekte im H-Atom (5 Punkte)

Der Darwin Term beschreibt neben dem relativistischen Masseneffekt und der Spin-Bahn Wechselwirkung eine relativistische Korrektur zu den Eigenenergien des Wassersoffatoms.

(a) (2P) Zeigen Sie mit Hilfe der Störungstheorie 1.Ordnung, dass der Darwin Term zu einer Energieverschiebung

$$\Delta E = \frac{\pi\hbar^2}{2m_0^2c^2}\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}|\psi(0)|^2$$

der Wasserstoffeigenzustände führt!

(b) (3P) Berechnen Sie für den $n = 2$ Zustand des Wassersoffatoms explizit alle drei relativistischen Energiekorrekturen aus der Vorlesung (relativistischer Masseneffekt, Spin-Bahn Kopplung und Darwin Term) und zeichnen Sie diese maßstäblich in einem Energiediagramm ein! Benutzen Sie dazu die Wasserstoffeigenzustände.